



TITLE:

Surface embedding in
 \mathbb{R}^4 と critical point の
個数の関係について(2次元結び目
を中心とした結び目理論)

AUTHOR(S):

関根, 光弘

CITATION:

関根, 光弘. Surface embedding in \mathbb{R}^4 と critical point の個数の関係について
(2次元結び目を中心とした結び目理論). 数理解析研究所講究録 1987, 620: 75-82

ISSUE DATE:

1987-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99886>

RIGHT:

Surface embedding in \mathbb{R}^4 と critical point の 個数の関係について

広島大 理 関根光弘 (Mituhiko Sekine)

§ 0.

M^2 を connected, closed, oriented 2-genus g の 2-mfd とし,
 $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を embedding とする。 \mathbb{R}^4 に座標軸を固定し, その
1つの軸への projection を $p: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ とする。このとき,
smooth function $p \circ f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は, f を \mathbb{R}^4 の微かな isotopy
で動かすことにより, Morse function にすることができる。
それをあらためて f と書き, $p \circ f = h$ とおく。 h の critical
point の個数 (これを以下 C_h と書く。) と, f の isotopy type
には, 一般には何の関係もないが C_h が小さいとき (とくに, 最小)
制約がつくであろうことが予想される。以下, この問題につい
て簡単な考察を行なう。なお, §1, §2 における, $M, f, p, h,$
 C_h などの用語は全て上の通りとする。

§ 1. $M = S^2$ の場合

$M = S^2$ の場合, Morse の不等式により, C_h のとりうる値を小さい順に 2 つあげると, 2 と 4 になる。 $C_h = 2$ のとき, $h = p \circ f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ とすると f の isotopy type が "standard" であることは, よく知られる。

[注意] $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ なる embedding の isotopy type が "standard" であるとは, $f(M^2)$ が \mathbb{R}^4 内で genus g の solid handlebody によって bound されることとする。 [H-K]

$C_h = 4$ のとき, f の isotopy type は, やはり standard であることが Scharlemann によって証明されている。 [S. 1]

§ 2. $M = T^2$ の場合

$M = T^2$ の場合, C_h の最小値は 4 である。そこで次の問題を考える。

問 1. $C_h = 4$ とする。 ($h = p \circ f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$) このとき,

f の isotopy type は standard か?

[K ; problem 4.30]

[注意] h の indices は, 0 が 1 コ, 1 が 2 コ, 2 が 1 コ であるから, $\mathbb{R}^4 - f(T^2)$ の handle 分解を考えれば, 1-handle 1 コから成り立っている。さらに $H_1(\mathbb{R}^4 - f(T^2); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ なので, $\pi_1(\mathbb{R}^4 - f(T^2)) \cong \mathbb{Z}$ である。

従って、問1に対する反例がもし存在するならば、

complement の $\pi_1 = \mathbb{Z}$ と、なる knotted torus in \mathbb{R}^4 である。

$C_h = 4$ とする。 $h: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ の critical point z 、index 0 のものを C_1 、index 1 のものを C_2, C_3 、index 2 のものを C_4 とおくとき、 $h(C_1) < h(C_2) < h(C_3) < h(C_4)$ と仮定してよい。いま、 $h(C_1) < C'_1 < h(C_2) < C'_2 < h(C_3) < C'_3 < h(C_4)$ となるように C'_1, C'_2, C'_3 をとる。 $t \in h(T^2) \subset \mathbb{R}$ に対し、 $K_t = f \circ h^{-1}(t)$ in $P^{-1}(t) \cong \mathbb{R}^3$ の様子を見ると、 $K_{C'_1}, K_{C'_3}$ は \mathbb{R}^3 内の unknot、 $K_{C'_2}$ は \mathbb{R}^3 内の 2-component link である。 t を C'_2 から C'_1 へ、連続的に減少させると、 $K_{C'_2}$ に、ある fusion band b がつき、やがて $K_{C'_1}$ になる。(t を C'_2 から C'_3 へ連続的に増加させれば、 $K_{C'_2}$ にある fusion band \tilde{b} がつき、やがて $K_{C'_3}$ になる。)

そこで、次の問題が考えられる。

問2. 2-component link $L = K \cup K'$ in \mathbb{R}^3 と band

b_1, b_2 があって、 L を b_1, b_2 で fusion したものをそれぞれ

K_1, K_2 とする。 K_1, K_2 がどちらも unknot であるとき、

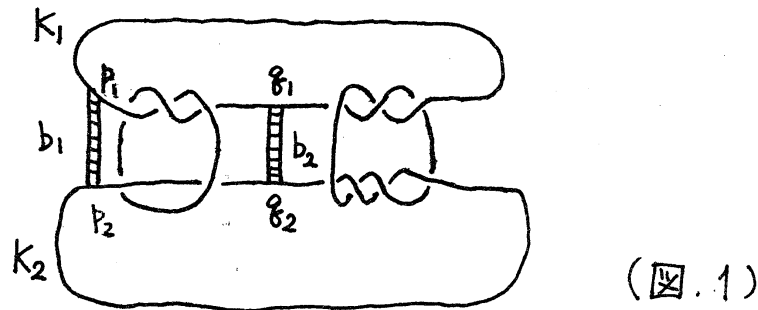
b_1 と b_2 は isotopic か？

この問2が肯定的であれば、問1も肯定的である。

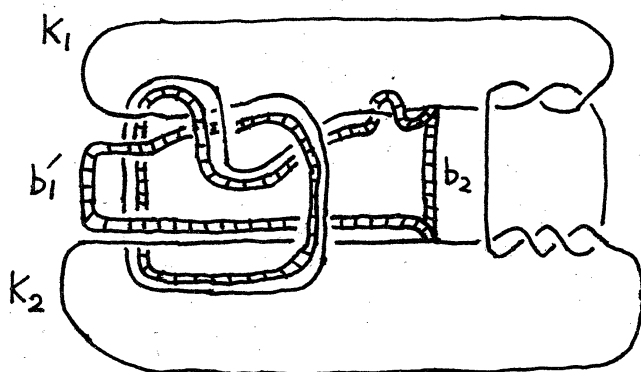
(cf. [S. 2 : p. 258 Lemma 2.5])

しかし、研究集会中に、河内先生、鈴木先生、中西先生、丸本先生により、それぞれ、問2に対する反例候補が示された。その中で、中西先生の示された例に対し、問2の反例となっていることが証明できたので、以下、これについて述べることにする。

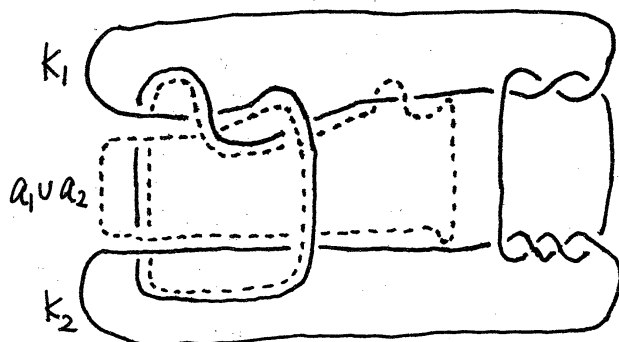
$L = K_1 \cup K_2$ と、band b_1, b_2 を次のようなものとする。



b_1 の一端 p_1 を K_1 上すべらせることにより、 q_1 の位置に動かし、同様に、 b_1 のもう一方の端 p_2 を K_2 上すべらせることにより q_2 の位置に動かす。こうして得られた b_1 と isotopic な band を b'_1 とする。(図. 2)。さらに、 b'_1 の中心線がつくる arc を a_1 、 b_2 の中心線がつくる arc を a_2 とすると、 $a_1 \cup a_2$ は $R^3 - L$ の simple closed curve となる(図. 3)が、それが $R^3 - L$ において null homotopic でないことを示せば b_1 と b_2 は isotopic でない。



(図. 2)



(図. 3)

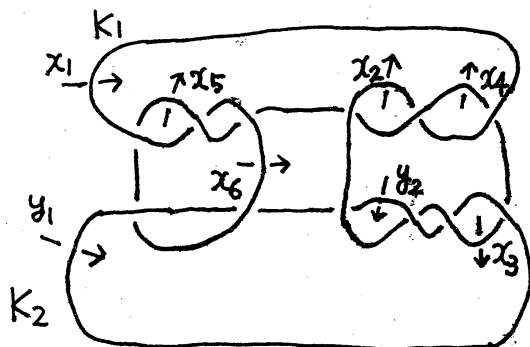
いま, $G = \pi_1(\mathbb{R}^3 - L)$ は, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2$ を generator とし, $y_1 x_3 y_1^{-1} x_1 = x_1 x_4 = x_4 x_2$,

$$x_2 x_6^{-1} y_1 x_6 = y_2 x_2 = x_3 y_2 = y_1 x_3,$$

$$x_6 x_2^{-1} x_4 x_2 = x_5 x_6 = x_1 x_5,$$

$$x_1 x_5 x_1^{-1} y_1 = y_1 x_6 \text{ なる relation をもつ group } \pi$$

ある。ただし, x_i, y_j は, 下の通りである。



(図. 4)

$a_1 \cup a_2$ が表す G の元 W は, band の K_1, K_2 へのからみをそれぞれ一カ所に集めてしまうことにより,

$$W = x_1^\alpha u_1 u_2^n u_3 u_4^{n'} y_1^\beta \text{ と書ける.}$$

$$\begin{aligned} (\text{ただし, } u_1 &= x_4 y_2^{-1} y_1^{-1} x_1 x_2, \quad u_2 = x_6^{-1} x_1^{-1} y_1 x_5^{-1} x_4 y_2^{-1} y_1^{-1} x_1 x_2, \\ u_3 &= x_2^{-1} x_3^{-1}, \quad u_4 = x_6 x_2^{-1} x_3^{-1}, \quad \alpha, \beta, n, n' \in \mathbb{Z} \text{ とする.}) \end{aligned}$$

これらが全て G の中で "nontrivial" であることをいえばよい。
 まず, Hurewicz homomorphism $\varphi: G \rightarrow H_1(\mathbb{R}^3 - L; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ により, $\varphi(W) = (\alpha + 1 - n', -2 - n + \beta)$ となるので,
 $\alpha = n' - 1, \beta = n + 2$ のとき, すなわち $W = x_1^{n'-1} u_1 u_2^n u_3 u_4^{n'} y_1^{n+2}$ について考えればよい。そこで, $\phi: G \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ なる homomorphism を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \phi(x_i) &= A_i \quad (i=1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad \phi(y_j) = B_j \quad (j=1, 2) \text{ とし,} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_3 = \begin{bmatrix} \omega & \omega \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & \omega^2 \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \\ A_5 &= \begin{bmatrix} -1 & \omega \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} \omega^2 & \omega^2 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(ただし, ω は 1 の原始 3 乗根) とする。

すると, 計算により, $\phi(W) = A_1^{n'-1} \begin{bmatrix} -\omega & -\omega \\ 0 & -\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\omega^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n'}$ となる。ここで, A_1 の order は 3 であるから,

$$n' \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき, } \phi(W) = \begin{bmatrix} -\omega & n' - \omega \\ 0 & -\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$n' \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき, } \phi(w) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ \omega & -n'-1 \end{bmatrix}$$

$$n' \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき, } \phi(w) = \begin{bmatrix} \omega & -n'-1 \\ -\omega & n'-\omega \end{bmatrix}$$

$$\text{となり, どの場合にも, } \phi(w) \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

従って以上より, この例が問2の反例であることが示された。

この例の L , b_1, b_2 を用いることにより, 次のような2つの torus in \mathbb{R}^4 を構成する。(ただし, 用語は, 3ページと同じとする。)

- (i) $K_{c_2} = L$, $K_{c_1} = K_{c_3} = \text{unknot}$ で, $K_{c_2} \rightarrow K_{c_1}$
 $K_{c_2} \rightarrow K_{c_3}$ なる変化は, どちらも fusion band b_1 によるものであるような torus
- (ii) $K_{c_2} = L$, $K_{c_1} = K_{c_3} = \text{unknot}$ で, $K_{c_2} \rightarrow K_{c_1}$ は,
 fusion band b_1 による変化, $K_{c_2} \rightarrow K_{c_3}$ は, fusion band b_2 による変化であるような torus

(i) の torus は isotopy type が standard であるが, (ii) の torus の isotopy type について筆者には何もわかっていない。

参考文献

- [H-K] F. Hosokawa and A. Kawauchi
Proposals for unknotted surfaces in four-spaces
Osaka J. Math. 16 (1979) 233-248
- [K] R. Kirby
Problems in low dimensional manifold theory
Proc. Symp. Pure. Math 32 (1978) 273-312
- [S.1] M. Scharlemann
Smooth spheres in \mathbb{R}^4 with four critical points are standard
Invent. Math 79 (1985) 125-141
- [S.2] S. Suzuki
Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere
Math. Sem. Notes Kobe Univ 4 (1976) 241-371